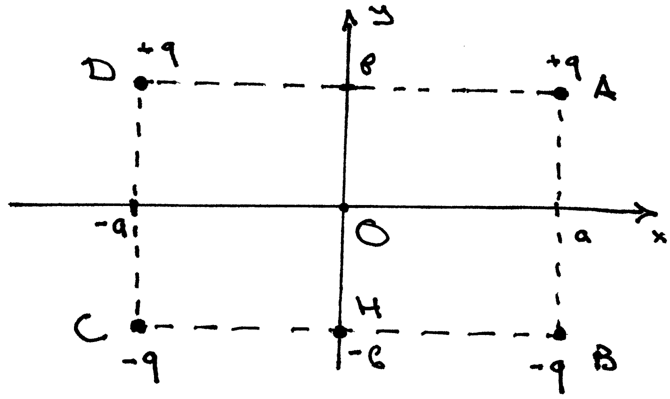
Electrostatique - Contrôle continu 2009
(correction)

Exercice I. Voir correction Ex. I.2 du contrôle 2007

Exercice II.



a). Plans de symétrie :

- le plan xy
- le plan passant par l'axe Oy, orthogonal au plan du dessin.

Plans d'antisymétrie :

- le plan passant par l'axe Ox et orthogonal au plan du dessin

Notons que ces symétrie impliquent :

- pour la question b) : $\vec{E}(O) \parallel Oy$
- pour la question d) : $\vec{E}(H) \parallel Oy$

On vérifiera ces prédiction ci-dessous par calculs explicites.

b). On a

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_{+q \text{ en } A}(O) + \vec{E}_{-q \text{ en } B}(O) + \vec{E}_{-q \text{ en } C}(O) + \vec{E}_{+q \text{ en } D}(O)$$

$$= k\frac{q}{|\vec{AO}|^3}\vec{AO} + k\frac{(-q)}{|\vec{BO}|^3}\vec{BO} + \frac{k(-q)}{|\vec{CO}|^3}\vec{CO} + \frac{kq}{|\vec{DO}|^3}\vec{DO}$$

et aussi

$$|\vec{AO}| = |\vec{BO}| = |\vec{CO}| = |\vec{DO}| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\vec{AO} = -\vec{CO} = (-a,-b)$$

$$\vec{BO} = -\vec{DO} = (-a,b).$$

Donc :

$$\vec{E}(O) = k\frac{q}{(a^2+b^2)^{3/2}}\left(\vec{AO} - \vec{BO} - \vec{CO} + \vec{DO}\right) =$$

$$= k\frac{q}{(a^2+b^2)^{3/2}}\left[(-a,-b) + (a,-b) + (-a,-b) + (a,-b)\right] =$$

$$= k\frac{q}{(a^2+b^2)^{3/2}}(0,-4b) = -\frac{4kqb}{(a^2+b^2)^{3/2}}\vec{e}_y$$

c). $\vec{F}_{\text{sur } A} = \vec{F}_{-q \text{ en } B \to +q \text{ en } A} + \vec{F}_{-q \text{ en } C \to +q \text{ en } A} +$

$$+ \vec{F}_{+q \text{ en } D \to +q \text{ en } A} =$$

$$= k \frac{(-q^2)}{|\vec{BA}|^3} \vec{BA} + k \frac{(-q^2)}{|\vec{CA}|^3} \vec{CA} + k \frac{q^2}{|\vec{DA}|^3} \vec{DA}$$

On a

$\vec{BA} = (0, 2b)$, $|\vec{BA}| = 2b$

$\vec{CA} = (2a, 2b)$, $|\vec{CA}| = 2\sqrt{a^2+b^2}$

$\vec{DA} = (2a, 0)$, $|\vec{DA}| = 2a$

et donc

$$\vec{F}_{\text{sur } A} = k \frac{(-q^2)}{8b^3} (0, 2b) + k \frac{(-q^2)}{8(a^2+b^2)^{3/2}} (2a, 2b)$$

$$+ k \frac{q^2}{8a^3} (2a, 0) =$$

$$= \left(\frac{kq^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}} \right), -\frac{kq^2}{4} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}} \right) \right).$$

d). De façon analogue à b). nous obtenons

$$\vec{E}(H) = k \frac{q}{|\vec{AH}|^3} \vec{AH} + k \frac{(-q)}{|\vec{BH}|^3} \vec{BH} + k \frac{(-q)}{|\vec{CH}|^3} \vec{CH} + k \frac{q}{|\vec{DH}|^3} \vec{DH}$$

Comme

$\vec{AH} = (-a, -2b)$, $|\vec{AH}| = \sqrt{a^2+4b^2}$,

$\vec{BH} = (-a, 0)$, $|\vec{BH}| = a$,

$\vec{CH} = (a, 0)$, $|\vec{CH}| = a$,

$\vec{DH} = (a, -2b)$, $|\vec{DH}| = \sqrt{a^2+4b^2}$,

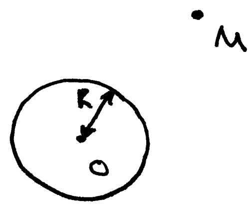
on a

$$\vec{E}(H) = k \frac{q}{(a^2+4b^2)^{3/2}} (-a, -2b) - \cancel{k \frac{q}{a^3} (-a, 0)} - \cancel{k \frac{q}{a^3} (a, 0)}$$

$$+ k \frac{q}{(a^2+4b^2)^{3/2}} (a, -2b) = \frac{kq}{(a^2+4b^2)^{3/2}} (0, -4b) =$$

$$= - \frac{4kqb}{(a^2+4b^2)^{3/2}} \vec{e}_y$$

Exercice III



densité volumique uniforme ρ

1). Plans de symétrie :

- tout plan passant par O

Plans de symétrie passant par M sont tous les plans passant par OM. Leur intersection coïncide avec la droite OM et donc $\vec{E}(M) \parallel \vec{OM}$

Symétries continues :

- rotations autour de O ⇒ les composantes de $\vec{E}(M)$ ne dépendent que de la distance $|\vec{OM}|$.

En résumé :

$$\vec{E}(M) = f(|\vec{OM}|)\, \vec{e}_{\vec{OM}}$$

↑ vecteur unitaire $\frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|}$

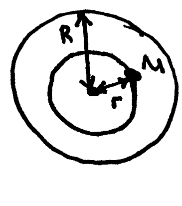
2). Deux situations à distinguer :

i). M est à l'intérieur de la boule

ii). M est à l'extérieur de la boule

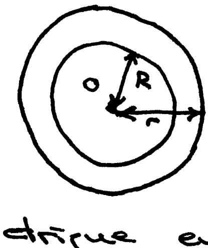
Dans les 2 cas, on choisit comme surface de Gauss la sphère de centre O, passant par M :

i).



(on note $r = |\vec{OM}|$)

ii).



Dans les 2 cas, le champ électrique en tout point de la sphère est orthogonal à sa surface et est de module constant (égal à $f(r)$). Donc le flux à travers cette sphère sera égal à

$$\Phi = \int_{\text{sphère}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = |\vec{E}|\cdot\begin{pmatrix}\text{aire de}\\ \text{la sphère}\end{pmatrix} = f(r)\cdot 4\pi r^2.$$

D'autre part, d'après le théorème de Gauss, ce flux est égal à la charge contenue à l'intérieur de la sphère, divisée par ε_0.

Dans le cas i) cette charge est égale à

$$\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

densité volumique — volume de la boule de rayon r

Dans le cas ii), elle est égale à

$$\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

(c'est-à-dire, à la charge totale de la boule initiale).

Donc :

$$4\pi r^2 f(r) = \begin{cases} \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3/\varepsilon_0 & \text{si } 0 \leq r \leq R \\ \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3/\varepsilon_0 & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

d'où :

$$f(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} & \text{si } 0 \leq r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} & \text{si } r \geq R. \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OM} & \text{si } M \text{ est à l'intérieur de la boule} \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 |\overrightarrow{OM}|^3}\overrightarrow{OM} & \text{s'il est à l'extérieur.} \end{cases}$$

Exercice IV

D'après le théorème de Gauss-Ostrogradskyy si S est une surface fermée, U le volume délimité par S et $\vec{E}$ un champ vectoriel quelconque, alors

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_U \operatorname{div} \vec{E}\, dV$$

D'autre part, pour le champ électrique

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int.}S}}{\varepsilon_0} = \iiint_U \rho \frac{dV}{\varepsilon_0},$$

où ρ note la densité volumique des charges. Donc, pour tout $U \subset \mathbb{R}^3$ nous avons

$$(*) \qquad \iiint_U \operatorname{div} \vec{E}\, dV = \iiint_U \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV$$

En particulier, on peut prendre U suffisamment petit pour pouvoir supposer que $\operatorname{div}\vec{E}$ et ρ sont constantes sur U. Dans ce cas :

$$\iiint_U \underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{\text{const}}\, dV = \operatorname{div}\vec{E} \cdot \text{volume}(U)$$

$$\iiint \underbrace{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}_{\text{const}}\, dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \text{volume}(U).$$

D'où le résultat : $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.